# Correction du contrôle 6
# Géométrie dans l'espace
# Fonctions du second degré

**Solution de l'exercice 1.**

1. $48 > 0$ donc l'équation admet deux solutions

$$x = \sqrt{48} = \sqrt{4 \times 12} = \sqrt{4 \times 4 \times 3} = \sqrt{4^2 \times 3} = 4\sqrt{3}.$$

et

$$x = -4\sqrt{3}.$$

Donc l'ensemble solution est

$$\mathscr{S} = \left\{-4\sqrt{3}; 4\sqrt{3}\right\}.$$

2. $\frac{1}{4} > 0$ donc l'équation possède deux solutions :

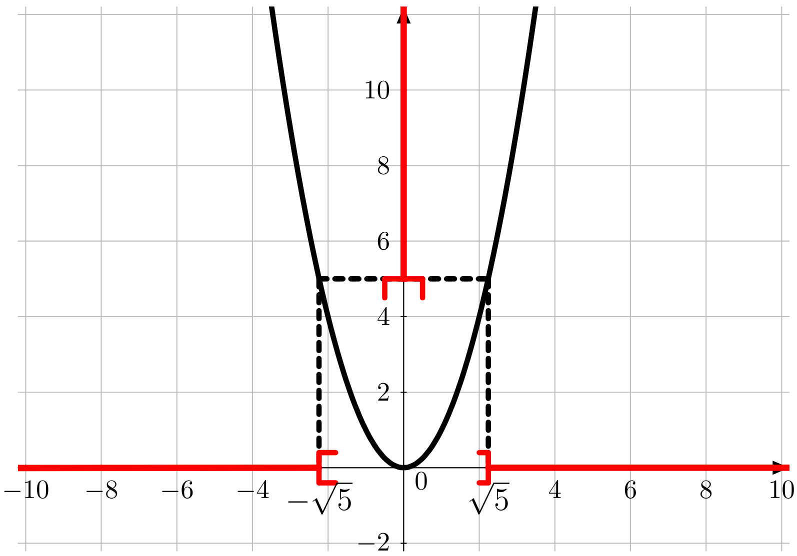
$$x = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}.$$

3. On commence par résoudre l'inéquation $x^2 = 5$ qui possède deux solutions (car $5 > 0$) :

$$x = \sqrt{5} \qquad \text{ou} \qquad x = -\sqrt{5}.$$

Donc l'ensemble solution est

$$\mathscr{S} = \left]-\infty; -\sqrt{5}\right[ \cup \left]\sqrt{5}; +\infty\right[.$$




4. La volume du cylindre est donné par l'aire de la base fois la hauteur et l'aire de la base est égale à $\pi R^2$. D'où :

$$\mathscr{V} = \pi R^2 h.$$

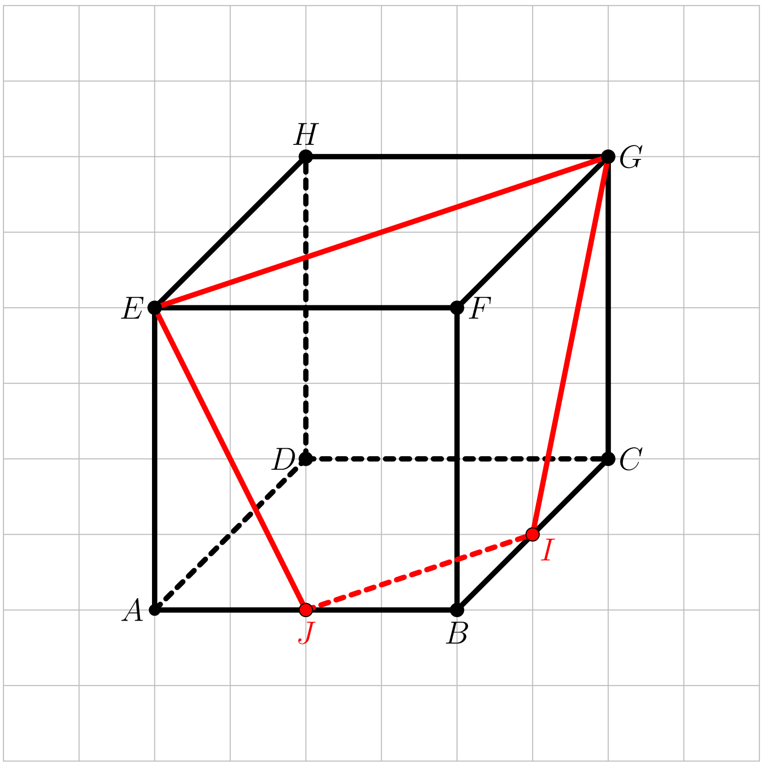
**Solution de l'exercice 2.**

1. L'image de 0 par $f$ est par définition
$$f(0) = -0^2 + 10 \times 0 + 8 = 8,$$
et l'image de $-1$ vaut
$$f(-1) = -(-1)^2 + 10 \times (-1) + 8 = -1 - 10 + 8 = -11 + 8 = -3.$$
2. La parabole associée à $f$ est orientée vers le bas car $a = -1 < 0$.
3. L'abscisse $x_S$ du sommet $S$ est égale à
$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-10}{2 \times (-1)} = \frac{-10}{-2} = \frac{10}{2} = 5.$$
4. On en déduit que son ordonnée vaut
$$y_S = f(x_S) = f(5) = -5^2 + 10 \times 5 + 8 = -25 + 50 + 8 = 25 + 8 = 33.$$
5. Ainsi son tableau de variation est

| $x$ | $-\infty$ | | $5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $33$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

**Solution de l'exercice 3.**

1.



2. $ABCDEFGH$ est un cube. Donc $ABFE$ est un carré, donc en particulier un parallélogramme et donc $(AB)$ et $(EF)$ sont parallèles.
3. Le point $F$ n'appartient pas au plan $(EGI)$. Donc la droite $(EF)$ n'est pas contenue dans le plan $(EGI)$. Cependant le point $E$ est un point qui appartient à la fois à droite $(EF)$ et à la fois au plan $(EGI)$. Donc la droite $(EF)$ est sécante (en $E$) avec le plan $(EGI)$ mais non contenue dans ce plan.
4. Le point $B$ n'appartient pas au plan $(EGI)$. Donc la droite $(AB)$ n'est pas contenue dans le plan $(EGI)$. Supposons $(AB)$ parallèle avec le plan $(EGI)$. Puisque $(AB)$ est parallèle à la droite $(EF)$ (voir la question 1), alors par transitivité, la droite $(EF)$ est parallèle au plan $(EGI)$. Ceci contredit la question 2. Donc il est impossible que la droite $(AB)$ soit parallèle au plan $(EGI)$. Ainsi la droite $(AB)$ est sécante avec le plan $(EGI)$.
5. Deux droites sont coplanaires s'il existe un plan qui contienne ces deux droites.
6. Deux droites coplanaires sont ou sécantes ou parallèles (puisqu'elle sont dans un même plan, le problème se ramène à de la géométrie plane).
7. La droite $(IJ)$ appartient au plan $(ABC)$. La droite $(EG)$ appartient au plan $(EFG)$. Les plans $(ABC)$ et $(EFG)$ sont parallèles (car contiennent les faces opposées du cube). Donc les plans $(ABC)$ et $(EFG)$ n'ont pas de point commun. Il en est donc de même des droites $(IJ)$ et $(EG)$. Ainsi ces deux droites ne s'intersectent pas.
8. $(EG)$ et $(IJ)$ sont coplanaires puisqu'elles appartiennent toutes les deux au plan $(EGI)$ (par définition de $J$). Donc d'après la question 6, elles sont ou sécantes ou parallèles. Or d'après la question 7, ces deux droites ne sont pas sécantes. Les droites $(EG)$ et $(IJ)$ sont donc parallèles.
9. Puisque $ABCDEFGH$ est un cube les diagonales des côtés opposés sont parallèles. Donc $(AC) \mathbin{/\!/} (EG)$. Or d'après la question précédente, les droites $EG)$ et $(IJ)$ sont également parallèles. Donc par transitivité, les droites $(AC)$ et $(IJ)$ sont également parallèles entre elles.
10. Puisque $(AC)$ et $(IJ)$ sont parallèles, par le théorème de Thalès, on a

$$\frac{IJ}{AC} = \frac{BI}{BC} = \frac{BJ}{BA}.$$

Or, puisque $I$ est le milieu de $BC$, on sait que $\frac{BI}{BC} = \frac{1}{2}$. Donc

$$\frac{BJ}{BA} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow BJ = \frac{BA}{2} \Leftrightarrow 2BJ = BA = BJ + JA \Leftrightarrow BJ = JA.$$

Finalement on conclut que le point $J$ est bien le milieu de $[AB]$.
11. Le point $J$, respectivement $I$ est le milieu du segment $[AB]$ respectivement $[BC]$. Or $AB = BC = 4$ cm. Donc $JB = BI = \frac{4}{2} = 2$ cm. Or le triangle $JBI$ est rectangle en $B$. Donc d'après le théorème de Pythagore :

$$JI^2 = JB^2 + BI^2 = 2^2 + 2^2 = 4 + 4 = 8.$$

D'où,

$$JI = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$